INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Transições de fases e fenômenos críticos - PG 01/2016

Prof. Jürgen F. Stilck

3^a Lista de Exercícios
Entrega dia 20/05/16

1) Escreva a matriz de transferência para o modelo de Potts unidimensional de q estados, dado pela hamiltoniana

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i=1}^{N} \delta_{\sigma_i, \sigma_{i+1}},$$

onde $\sigma_i = 1, 2, ..., q$ e $\sigma_{N+1} = \sigma_1$. Mostre que o maior autovalor é dado por $\exp(\beta J) + q - 1$ e que os autovalores restantes são todos degenerados e iguais a $\exp(\beta J) - 1$. Obtenha expressões para a energia livre e o comprimento de correlação e mostre que elas têm um comportamento razoável nos limites de temperatura nula e infinita. Compare os seus resultados com os do modelo de Ising para $q = 2$, quando esperamos que os dois modelos sejam equivalentes.

2) Considere o problema de caminhadas aleatórias numa rede hipercúbica em d dimensões, partindo da origem, atribuindo uma atividade x a cada passo da caminhada.

a) Calcule a função de partição para este problema

$$\Xi = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \Gamma(n),$$

onde $\Gamma(n)$ é o número de caminhadas aleatórias de n monômeros ($n - 1$ passos).

b) Calcule o valor médio do número de passos. Determine o valor da atividade x no qual este número diverge. Ache o expoente crítico desta divergência.

3) O modelo de Blume-Capel numa rede de número de coordenação igual a q é definido pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -J \sum_{<i,j>} S_i S_j + D \sum_{i=1}^{N} S_i^2 - H \sum_{i=1}^{N} S_i,$$

onde a primeira soma é sobre primeiros vizinhos na rede, $S_i = 0, \pm 1$, e todos os parâmetros são positivos.

a) Utilize a desigualdade de Gibbs-Bogoliubov, com um hamiltoniano tentativa da forma

$$\mathcal{H}_0 = D \sum_{i=1}^{N} S_i^2 - \eta \sum_{i=1}^{N} S_i,$$

onde η é um parâmetro variacional, afim de obter uma solução aproximada de campo médio para este modelo

$$g_{CM} = \min_m g(T, H; m),$$

onde m é uma função de η que corresponde à magnetização por spin. Para o caso de campo nulo ($H = 0$), obtenha os coeficientes da expansão

$$g(T, H = 0; m) = A + Bm^2 + Cm^4 + Dm^6 + \dots$$

b) Considere, agora, o diagrama de fases do modelo a campo nulo, no plano $t = k_b T/J \times d = D/J$. Obtenha uma expressão para a linha de transições de segunda ordem dada por $B = 0$ com $C > 0$. Localize, sobre a linha crítica, o ponto tricrítico caracterizado por $B = C = 0$, com $D > 0$. Mostre que o modelo apresenta uma transição de *primeira* ordem para $C < 0$ e obtenha a linha de coexistência na vizinhança do ponto tricrítico. Mostre qua a linha crítica e a linha de coexistência têm a mesma tangente no ponto tricrítico.

4) Generalizando a energia livre que usamos na teoria de Ornstein-Zernike, na qual permitimos flutuações espaciais na magnetização $m(\vec{r})$, temos o *potencial de Landau-Ginzburg*:

$$g_0 = \int [atm^2(\vec{r}) + bm^4(\vec{r}) + c|\vec{\nabla} m(\vec{r})|^2] d^d r.$$

Vamos considerar o modelo de Ising definido num quadrado $L \times L$, e vamos estudá-lo usando a versão bidimensional do potencial acima. Vamos assumir que $m(x, y)$ assuma valores dados no contorno da região:

$$m(0, y) = m_0;\ m(x, 0) = m(x, L) = m(L, y) = 0$$

Seja $\tilde{m}(x, y)$ o perfil da magnetizaçãp que satisfaz as condições de contorno e minimiza o potencial de Landau-Ginzburg. Considere, então, $\Delta m(x, y)$ como sendo uma função qualquer que se anula no contorno. Então, $m(x, y, \lambda) = \tilde{m}(x, y) + \lambda \Delta m(x, y)$ é uma função que satisfaz as condições de contorno para qualquer valor de λ e

$$g(\lambda) - g_0 = \int [atm^2(x, y, \lambda) + bm^4(x, y, \lambda) + c|\vec{\nabla} m(x, y, \lambda)|^2 dxdy$$

tem um mínimo em $\lambda = 0$.

a) Usando a condição de que $\Delta m(x, y)$ se anula no contorno, prove a identidade:

$$\int \vec{\nabla} m(x, y).\vec{\nabla} \Delta m(x, y)\, dxdy = -\int \nabla^2 m(x, y) \Delta m(x, y)\, dxdy.$$

b) Usando a identidade acima, mostre que a condição

$$\frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = 0$$

para $\lambda = 0$ e para qualquer função $\Delta m(x, y)$ que se anula no contorno, faz com que a função $\tilde{m}(x, y)$ satisfaça a condição:

$$-\nabla^2 \tilde{m}(x, y) + at\tilde{m}(x, y) + 2b\tilde{m}^3(x, y) = 0.$$